2. Il calcolo a scuola: sperimentazione di un nuovo progetto didattico

Gianfranco Arrigo[1]

In this paper, we present a new approach for the teaching of arithmetic calculus experimented in several primary school classes in the last years. This research has started from the publication, in the issue 40 of this journal (may 2000), of the paper "Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale" by G. Arrigo. The proposed approach is based on the use of the pocket calculator as usual educational instrument, on the improvement of mental calculus and mathematical in-line writing and on the estimation of result of complex calculations. The proposed approach allows the elimination from the curriculum the teaching of Arabic calculation algorithms.

1. Introduzione

A partire dalla pubblicazione (Arrigo, 2000) ho avuto modo di rivolgermi a gruppi di insegnanti in occasione di corsi di aggiornamento tenuti in Ticino e in varie regioni dell'Italia, senza dimenticare la presentazione fatta al grande Convegno di Castel San Pietro Terme nell'edizione del 2008[2]. Il grande interesse mostrato dai corsisti mi ha incoraggiato a continuare a percorrere questa strada innovatrice e a progettare una prima sperimentazione in classe. Ho trovato un gruppetto di insegnanti disposte a provare con i propri allievi lungo tutto l'arco della scolarità primaria. Quest'anno si lavora nelle classi terze, quindi si possono già svolgere attività importanti su addizione, sottrazione e moltiplicazione. I primi riscontri ci stimolano a continuare su questa strada fino in quinta. Vedremo.

2. Due ardui problemi di insegnamento

Con questo progetto voglio proporre una soluzione coerente, attuale e unitaria a due importanti problemi concernenti il curricolo scolastico primario.

Il primo è quello del cosiddetto calcolo in colonna (o calcolo scritto), ossia degli algoritmi arabici per il calcolo di somme, prodotti, differenze e quozienti.

Si sa che questi algoritmi, insieme al sistema di numerazione posizionale in base dieci, sono stati divulgati nelle nostre regioni dal *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, detto anche Fibonacci (~1180-~1250). Il titolo non deve trarre in inganno: fino al secolo XII il vocabolo *abaco* (o *abbaco*) significava *aritmetica* e spesso più particolarmente aritmetica basata sull'uso di cifre indo-arabiche (Loria, 1929-1933 in Bagni,

1. Le basi teoriche del nuovo progetto per l'insegnamento del calcolo nella scuola dell'obbligo si trovano in (Arrigo, 2000).
2. Si è trattato del seminario per insegnanti di elementare e media dal titolo *Mente e calcolatrice: a ciascuna il suo ruolo*.

1996). In questa opera, appunto, il giovane Leonardo spiega la tecnica degli algoritmi arabici e propone una raccolta di interessanti problemi che possono essere risolti applicando tali algoritmi. Uno di questi problemi ha avuto grande fortuna: quello sull'evoluzione di una coppia di conigli, i quali diventano fecondi a partire dal secondo mese di vita, problema che sfocia in una successione numerica, detta appunto *successione di Fibonacci*. Si sa che Leonardo aveva imparato tali tecniche direttamente dai mercanti arabi durante un soggiorno nell'Africa settentrionale. L'opera del Fibonacci non è stata subito accolta con grande entusiasmo, per una serie di motivi che qui non sto a indicare, ma col tempo gli algoritmi arabici hanno sostituito completamente – almeno alle nostre latitudini – l'uso dell'abaco inteso come tavoletta per il calcolo e sopravvivono ancora oggi, se non altrove, nella scuola primaria. Già, forse solo nella scuola primaria. Ben diversa è la situazione nella vita reale: praticamente nessuno calcola più in questo modo. La venditrice, un tempo maestra nell'eseguire addizioni e sottrazioni in colonna, oggi usa la cassa registratrice automatica, che stabilisce l'importo totale, il resto e, se necessario, lo sconto speciale; usa pure la bilancia automatica, che determina con estrema precisione la quantità e il prezzo della merce pesata. La casalinga, quando le occorre recarsi all'ufficio postale per eseguire dei pagamenti (per esempio a fine mese), usa la calcolatrice. Sui posti di lavoro e nelle economie famigliari la fa da padrone il *computer*, mentre per eseguire calcoli importanti e complicati si ricorre ai centri di calcolo. Già nel mio articolo del 2000 scrivevo:

«È quindi giunto il momento che la scuola prenda in considerazione seriamente il problema del calcolo in colonna e si ponga senza mezzi termini la domanda se ha ancora senso, alle soglie del duemila, insegnare a padroneggiare gli algoritmi del calcolo in colonna».

Il secondo problema è costituito dall'esistenza della calcolatrice elettronica tascabile a basso costo. In generale, a quanto mi consta, il settore scolastico dell'obbligo non ha mai accettato con interesse ed entusiasmo questo nuovo strumento di calcolo. Le posizioni assunte dagli insegnanti nei confronti della calcolatrice tascabile possono essere di tre tipi:

- rifiuto per principio, quindi proibizione di farne uso in classe,
- tolleranza disinteressata, quindi nessuna responsabilità di insegnarne un uso corretto,
- integrazione dello strumento nell'educazione al calcolo numerico.

Molto significativo è il seguente estratto dal testo (Enzensberger, 1997):

«– E tu chi sei? gli chiese Roberto.

E quel tizio, con sua grande sorpresa, gli urlò:

Sono il mago dei numeri!

Ma Roberto non aveva proprio voglia di farsi prendere in giro da un nanetto come quello.

– Tanto per cominciare, disse, il mago dei numeri non esiste.

– Ah no? E se non esisto perché allora mi rivolgi la parola?

– E poi odio qualsiasi cosa abbia a che fare con la matematica.

(…)

Con un balzo elegante il mago scese dalla foglia di acetosella e si mise accanto a Roberto che per protesta si era seduto nell'erba alta.

(…) La sai una cosa? Gran parte dei veri matematici i calcoli non li sa nemmeno fare. Non vogliono sprecare il tempo, e poi ci sono le calcolatrici. Ce n'hai una anche tu, no?

– Certo, però a scuola non possiamo usarla.

– Ho capito, disse il mago. Non fa niente. Sapere un po' le tabelline non guasta. Può tornare utile se si scaricano le batterie. Ma la matematica, caro mio, è un'altra cosa!

(…)

– Di magico i numeri hanno che sono semplici. In fondo non ti serve nemmeno la calcolatrice. Per cominciare ti basta una sola cosa: l'uno. Puoi farci quasi tutto».

Le maestre usano spesso introdurre brani presi da libri come questo: servono a creare un'atmosfera positiva nei confronti dell'attività matematica.

I due problemi dell'insegnamento citati in precedenza rimangono tuttora irrisolti, almeno dalle nostre parti.

Si continua a insegnare gli algoritmi del calcolo in colonna, spendendo molto tempo, molto spesso tediando gli allievi che non sempre riescono a capire il perché di certi modi di fare e finiscono per adeguarsi alla situazione memorizzando i vari passaggi. L'addizione in colonna si impara abbastanza facilmente, a condizione di non dimenticare i riporti. La sottrazione in colonna è già più ardua, anche se, giocando sui complementi, ogni sottrazione potrebbe essere trasformata in addizione: ma non mi risulta che si faccia così in classe. La moltiplicazione è più difficile ancora, soprattutto se le cifre dei fattori sono numerose. Vi sono però metodi alternativi; fra i meno sconosciuti ricordo la *moltiplicazione per gelosia* (o per *graticola*), la moltiplicazione *egizia* o *del contadino russo* basata sulla scomposizione di un numero nella somma di potenze di 2 e altri ancora. Infine la divisione in colonna pone il più difficile problema di apprendimento. Si sono tentate variazioni del metodo genuino, con lo scopo di migliorare le percentuali di riuscita. Cito ad esempio quella presentata da Brousseau (2007), detta «divisione ergonomica» e applicata in Francia, molto simile a quelle usate nei paesi anglosassoni e in Finlandia. Lo stesso autore afferma di aver cercato metodi più adatti alle possibilità umane, senza però poterne constatare l'esistenza; sta di fatto che le difficoltà rimangono.

Il risultato di questo insegnamento è deludente. Gli allievi più abili, come sempre, imparano senza eccessive difficoltà. Gli altri non riescono a raggiungere livelli di comprensione accettabili e si rifugiano con successo alterno nella memorizzazione dei vari passaggi richiesti dall'algoritmo, col risultato che, non appena cessa la necessità di metterlo in atto, l'abilità svanisce dalla mente. Raramente si trova qualcuno che sappia spiegare le ragioni matematiche alla base dei singoli passaggi. Il tutto assume quindi un'aria di mistero. «Si fa così perché me lo hanno insegnato» è la risposta che va per la maggiore anche fra gli adulti.

La calcolatrice, soprattutto nella scuola primaria, è poco usata e dove la si usa è spesso male impiegata. «Gli allievi sono più abili di me nel manipolare questi aggeggi elettronici: io non ho proprio nulla da insegnare». Nulla di più falso.

3. Il nuovo progetto di insegnamento del calcolo

Il progetto si basa sui tre principi seguenti

1. Calcoli semplici e stima di risultati si eseguono usando la propria mente (calcolo mentale e scrittura matematica in riga).
2. Calcoli faticosi e sequenze complesse di calcoli si fanno a macchina.
3. Il calcolo scritto (l'insieme degli algoritmi arabici o calcoli in colonna) non dovrebbe più far parte dei programmi, ma, se lo si vuole, può essere visto in un contesto storico nel quale si mettono a confronto diversi tipi di algoritmi.

Nel primo principio, sottolineo quanto messo tra parentesi: l'abilità di calcolo mentale degli allievi dev'essere continuamente sviluppata con molta cura, così come l'abitudine a servirsi della scrittura matematica già nella scuola primaria. Per esempio, dovendo calcolare la somma 387+858+235, invece di incolonnare i numeri e di applicare il noto algoritmo dell'addizione, posso procedere così:

$$387 + 858 + 235 = (300 + 800 + 200) + (80 + 50 + 30) + (7 + 8 + 5) =$$
$$1300 + 160 + 20 = 1480$$

Si vede subito che sostanzialmente si fanno le stesse operazioni richieste dall'algoritmo arabico, ma con una grande differenza: l'uso della scrittura matematica rende esplicita la struttura matematica basata sulla scomposizione degli addendi in centinaia, decine e unità. Qualche insegnante mi confessava la propria perplessità sull'introduzione delle parentesi già in seconda primaria. Ho detto loro di usare delle scatole, per esempio stilizzate in questo modo:

$$\boxed{300+800+200} + \boxed{80+50+30} + \boxed{7+8+5}$$

Il bello della faccenda è che dopo un po' gli allievi cominciano a tralasciare i trattini orizzontali e qualcuno, bene informato nell'ambiente familiare, giunge a chiedere se può usare le parentesi invece delle scatole! Dunque, nessun timore. Dal punto di vista aritmetico, per poter eseguire le addizioni in questo modo, l'allievo deve essere abituato a scomporre i numeri e ad associarli in modo conveniente. Ecco allora due esempi di addizioni che possono essere eseguite a mente più velocemente che con la calcolatrice:

$$77 + 56 + 23 = (77 + 23) + 56 = 100 + 56 = 156$$
$$780 + 540 + 460 = 780 + (540 + 460) = 780 + 1000 = 1780$$

Qui il matematico vede subito l'uso combinato delle proprietà associativa e commutativa dell'addizione. A mio modo di vedere, nella scuola primaria, non conviene presentarle separatamente con i loro nomi così difficili da ricordare, ma è importante far notare agli allievi che per calcolare una somma di più addendi si può iniziare dove si vuole e procedere nell'ordine desiderato: basta considerare tutti gli addendi, ciascuno una sola volta. Questa è una proprietà familiare a chiunque abbia già contato un certo numero di oggetti e perciò fa parte sicuramente del curricolo sommerso di ogni allievo.

E chi obietta che non sempre capita di incontrare calcoli così addomesticati mi dà l'occasione per affermare che il calcolo mentale deve servire soprattutto per stimare risultati di sequenze di calcoli e che i numeri che servono per ottenere la stima sono scelti dallo stimatore, il quale, a poco a poco, se convenientemente abituato, sa aggiustarli (sceglierli) in modo che risulti più facile calcolare mentalmente. Per esempio:

$$\begin{array}{lccccccl} \text{calcolo:} & 23{,}80 & + & 41{,}25 & + & 73{,}15 & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{stima:} & 25 & + & 40 & + & 75 & = & (25+75)+40=100+40=140 \end{array}$$

risultato esatto ottenuto con la calcolatrice: 138,2

In (Arrigo, 2000) si trovano altri esempi di situazioni additive (ma non solo) che, con un minimo di abilità, si possono risolvere più in fretta a mente che con la calcolatrice. Occorre quindi sviluppare con cura e gradatamente le abilità di calcolo mentale degli allievi. Per dare un'idea meno vaga, riporto alcune situazioni fra le più interessanti e frequenti, proponibili nella scuola primaria.

1. Addendi ripetuti

$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 =$
$= 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 15 + 15 + 18 + 20 = 68$

Commento: per capire il vantaggio del calcolo mentale, basta provare ad eseguire questo calcolo con una calcolatrice.

2. Addendi vicini

$607 + 606 + 605 + 606 = 600 \cdot 4 + 7 + 6 + 5 + 6 = 2400 + 24 = 2424$

Commento: questa situazione si presenta regolarmente quando si vuole ottenere una media di misurazioni ripetute.

3a. Sottrazione (primo modo)

$73 – 17 = (73 – 10) – 7 = 63 – 7 = (63 – 3) – 4 = 60 – 4 = 56$

3b. Sottrazione (secondo modo)

$17 \xrightarrow{\mathbf{+3}} 20 \xrightarrow{\mathbf{+50}} 70 \xrightarrow{\mathbf{+3}} 73$

$73 – 17 = \mathbf{3} + \mathbf{50} + \mathbf{3} = 56$

Commento: questo secondo metodo non dev'essere tralasciato perché può risultare più agevole del primo. La sua formalizzazione con il percorso frecciato (operatori additivi) è consigliabile e permette di evitare il diffuso impiego erroneo del segno di uguaglianza (17+3=20+50=70+3=73).

4. Oltre le tabelline

$7 \cdot 13 = 7 \cdot (10 + 3) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 3 = 70 + 21 = 91$
$42 \cdot 14 = (40 + 2) \cdot 14 = 40 \cdot 14 + 2 \cdot 14 = 560 + 28 = 588$

Commento: al centro di questa tecnica di calcolo sta la proprietà distributiva. Contrariamente alla coppia di proprietà associativa e commutativa che insieme, come ho sottolineato in precedenza, dà un effetto… naturale, questa proprietà è alquanto anti-intuitiva e va quindi curata con molta attenzione. Più tardi, gli allievi dei quali ci stiamo occupando, la incontreranno per esempio nel calcolo letterale; anzi in quell'ambito sarà la proprietà basilare, quella, insomma, che regge un po' tutta la struttura del calcolo algebrico elementare.

5. Moltiplicazioni ripetute

$25 \cdot 38 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 38 = 100 \cdot 38 = 3800$
$189 \cdot 125 \cdot 8 = 189 \cdot (125 \cdot 8) = 189 \cdot 1000 = 189000$
Commento: valgono le considerazioni fatte per l'addizione con più addendi.

6. Divisione con una sola cifra al divisore

$112 : 8 = (80 + 32) : 8 = 80 : 8 + 32 : 8 = 10 + 4 = 14$
$301 : 7 = (280 + 21) : 7 = 280 : 7 + 21 : 7 = 40 + 3 = 43$
Commento: di nuovo è importante la proprietà distributiva[3]. Inoltre la scomposizione del dividendo dev'essere fatta opportunamente; nel secondo esempio essa risulta più difficile… ma anche più gratificante.

7a. Divisione con il divisore di due cifre (primo modo)

$390 : 15 = (390 : 5) : 3 = [(350 + 40) : 5] : 3 = [350 : 5 + 40 : 5] : 3 =$
$= 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 26$
Commento: la novità è che qui si applica l'importante relazione di divisibilità, cioè: se un numero è divisibile per (a·b) allora è divisibile per a e per b (e viceversa).

7b. Divisione con il divisore di due cifre (secondo modo)

$390 \xrightarrow{\mathbf{-20 \cdot 15}} 90 \xrightarrow{\mathbf{-6 \cdot 15}} 0$
$390 : 15 = \mathbf{20} + \mathbf{6} = 26$
Commento: valgono le stesse osservazioni fatte in 3b). Se la scomposizione appena presentata fosse troppo difficile, si possono sempre aumentare le tappe.

Parallelamente alla crescita dell'abilità nel calcolare mentalmente, cresce quella di eseguire calcoli approssimati o stime di risultati. Per esempio:

3. Attiro l'attenzione sul fatto che la distributività della divisione funziona solo in un senso: vale nel caso (a±b):c, ma non nel caso c:(a±b).

calcolo: $47 : (0{,}333 + 0{,}448 + 0{,}675)$

$$\begin{array}{cccc} 47 & 0{,}333 & 0{,}448 & 0{,}675 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 45 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$$

Stima: $45 : (0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}6) = 45 : 1{,}5 = 90 : 3 = 30$

Risultato ottenuto con la calcolatrice (approssimato a meno di un centesimo): 32,28.

Commento: l'originalità di questo calcolo mentale sta nell'uso della proprietà invariantiva della divisione. Contrariamente all'abitudine di moltiplicare per 10 (o per un'opportuna potenza di 10), qui si è moltiplicato (divisore e dividendo) per 2: tanto basta per ottenere una divisione equivalente tra numeri interi.

4. Primi sguardi sulla sperimentazione

Dopo aver effettuato alcune prove negli anni scorsi, quest'anno è partita una sperimentazione più strutturata che interessa cinque insegnanti[4]: una di Giulianova, due di Teramo e due di Verbania. Quest'anno le sperimentatrici abruzzesi hanno classi terze (chi una, chi due), mentre le verbanesi insegnano in classi seconde. Dall'anno scorso si sta lavorando sul progetto, sia sul piano teorico sia su quello dell'ingegneria didattica. Oltre al rispetto dei principi enunciati, si cerca, direi con ottimi esiti finora, di far piacere il calcolo mentale ai giovanissimi alunni. Si è tenuto conto anche dei preziosi consigli trasmessi da Ines Marazzani nell'ambito della sperimentazione sui numeri grandi (Marazzani, 2007).

Al di là delle questioni tecniche, l'obiettivo principale è di familiarizzare l'allievo con i numeri, di fare in modo che provi voglia e piacere nel manipolarli. Detto in altre parole: si cerca di portare l'allievo ad avere con i numeri uno stretto rapporto di amicizia. Ogni numero, anche quello che apparentemente sembrerebbe privo di interesse, nasconde proprietà – i bimbi li chiamano *segreti* – rilevanti dal punto di vista della struttura e quindi del calcolo mentale. Per esempio, dopo aver saputo che il numero civico di un istituto scolastico è il 78, ecco che si scopre che

$$78 = 39 \cdot 2 = (3 \cdot 13) \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

L'interesse sta nel fatto che 78 è divisibile per 13. In generale i multipli di 13 entro il 100 non sono molto conosciuti dagli allievi, ma nel calcolo mentale torna utile sapere che 26, 39, 52, 65, 78, 91 sono divisibili per 13, soprattutto perché un criterio di divisibilità per 13 normalmente non si conosce.

Di aneddoti che esaltano le proprietà intrinseche dei numeri interi, se ne trovano parecchi nella storia della matematica e dei matematici. Per esempio, si racconta che quando il matematico indiano Ramanujan era convalescente in una clinica di Put-

4. Si tratta delle insegnanti Maddalena Creati (Giulianova), Daniela Antonini e Silvana Di Michele (Teramo), Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi (Verbania), che non ringrazierò mai sufficientemente per il grande impegno e per la particolare capacità di tradurre in classe in modo esemplare le idee grezze che trasmetto loro.

ney (nei pressi di Londra) l'amico e collega Hardy andava spesso a fargli visita. In una di quelle occasioni, Hardy, senza nemmeno salutarlo, gli disse: «Il numero del mio taxi è 1729: un numero piuttosto insignificante». Al che, Ramanujan replicò: «No, Hardy! No, Hardy! Invece è un numero molto interessante. È il più piccolo numero esprimibile come somma di due cubi in due modi diversi» (Wells, 2002). Infatti, con l'ausilio anche solo di una semplice calcolatrice, non è difficile rendersi conto che:

n	n^3	$1729-n^3$	$\sqrt[3]{1729-n^3}$	funziona?
1	1	1728	12	sì
2	8	1721	non intera	no
3	27	1702	non intera	no
4	64	1665	non intera	no
5	125	1604	non intera	no
6	216	1513	non intera	no
7	343	1386	non intera	no
8	512	1217	non intera	no
9	729	1000	10	sì
10	1000	729	9	sì
11	1331	398	non intera	no
12	1728	1	1	sì

La tabella si ferma qui perché $13^3 > 1729$. Quindi le due scomposizioni pensate da Ramanujan sono 1^3+12^3 e 9^3+10^3 entrambe del numero 1729; altre non ce ne sono.

4.1. Manipoliamo da subito anche i numeri grandi

Anche se vetusti programmi ancora in auge prescrivono per la prima classe elementare la conoscenza dei numeri entro il 20, i didatti della matematica sono concordi nel riconoscere che tale restrizione non tiene e, anzi, si rivela dannosa. Ogni insegnante deve sapere che gli allievi portano a scuola un curricolo sommerso importante, che occorre conoscere e rispettare e sul quale dev'essere innestata la nuova conoscenza. L'esperienza effettuata dal gruppo di Bologna, sotto la guida di Ines Marazzani, ha mostrato come i bambini di prima elementare sanno benissimo cavarsela anche con numeri ben più grandi del 20, del 100, del 1000. Ecco un nostro esempio.

Possiamo sapere quanti alunni in tutto frequentano la nostra scuola?
(Teramo)
Li contiamo quando si entra la mattina.
Li facciamo mettere nell'atrio o in palestra e poi li contiamo.
Non va bene, se poi qualcuno è malato e non c'è non facciamo il conto giusto.
Facciamo un'indagine, chiediamo alle altre maestre quanti alunni ci sono nelle loro classi poi facciamo i conti.

Risultato dell'indagine.

1a A 20 alunni	1a B 20 alunni	1a C 19 alunni	1a D 20 alunni
2a A 21 alunni	2a B 15 alunni	2a C 23 alunni	2a D 25 alunni
3a A 23 alunni	3a B 23 alunni	3a C 22 alunni	
4a A 23 alunni	4a B 27 alunni	4a C 24 alunni	
5a A 25 alunni	5a B 27 alunni		

Per calcolare tutti gli alunni occorrerebbe trovare il risultato di
20+20+19+20+21+15+23+25+23+23+22+23+27+24+25+27=
Così è troppo difficile, non lo sappiamo fare!
Come potremmo cavarcela?

Disegniamo una crocetta per ogni alunno, facciamo righe di 10 crocette così è più facile contarle.

xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxx
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx	
100	100	100	57

(100 + 100 + 100) + 57 = 300 + 57 = 357

Frequentano la nostra scuola 357 alunni.

4.2. La rappresentazione dei numeri nel nostro sistema di numerazione

La figura 1 mostra un esempio di macchina calcolatrice manuale. Si intravede sulla destra la macchina costituita da un foglio organizzato a tabella e sulla sinistra le etichette dei valori.

Con questo materiale si possono svolgere almeno tre compiti basilari:

- rappresentare un numero
- addizionare due numeri
- sottrarre da un numero un altro numero

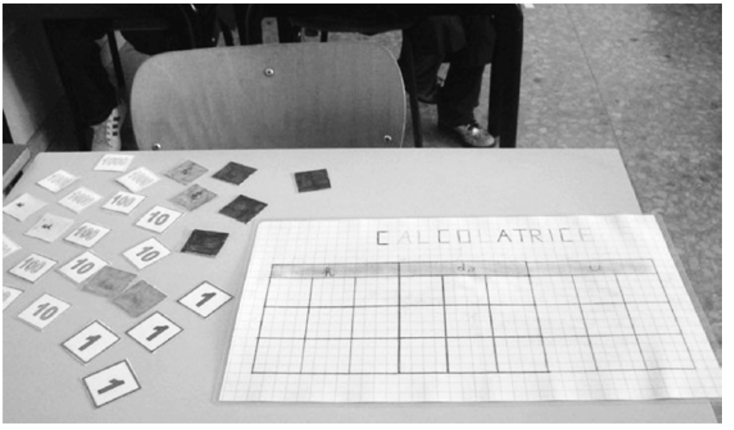

Figura 1 La calcolatrice (Giulianova).

Un materiale alternativo è quello degli orologi. Manipolando opportunamente le lancette si possono eseguire i tre compiti citati sopra. Si notino le etichette che contraddistinguono ogni orologio:

u sta per unità
da sta per decina
h sta per centinaio
uk sta per unità di migliaia

L'uso di questi simboli non è certamente una novità: sono gli stessi usati nel Sistema internazionale delle misure; con una variazione: uk invece di k per le unità di migliaia. Ciò rende più evidente il meccanismo della successione dei simboli che servono per scrivere i numeri grandi; successione che continua con dak, hk, uM, daM, hM, uG e così via.

Figura 2 Gli orologi (Giulianova).

4.3. I numeri complementari

Abbiamo visto come molto spesso la presenza di addendi complementari rispetto a un multiplo di 10 sia sfruttabile per semplificare e quindi velocizzare il calcolo della somma. Ecco un esempio di attività che ha lo scopo di abituare gli allievi a riconoscere i numeri complementari.

$$\boxed{51} \quad + \quad \boxed{} \quad = \quad \boxed{60}$$

$$\boxed{18} \quad + \quad \boxed{} \quad = \quad \boxed{20}$$

$$\boxed{} \quad + \quad \boxed{32} \quad = \quad \boxed{40}$$

… … …

Figura 3 Che numero manca? (Giulianova)

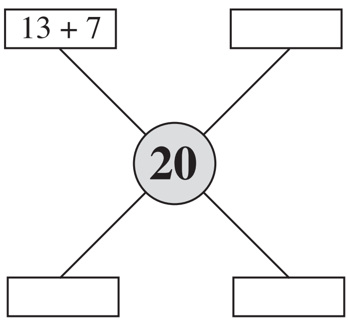

Figura 4 Ricerca dei complementi a 20 (Teramo). Il disegno dev'essere completato e abbracciare tutti i casi possibili.

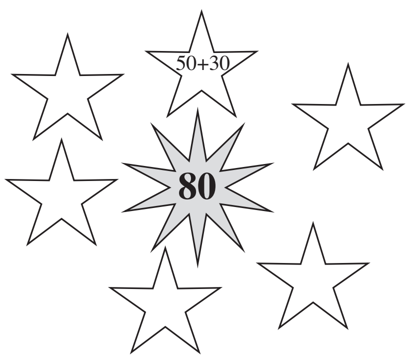

Figura 5 La galassia (Giulianova e Teramo). In ogni stella l'allievo è invitato a inserire una somma di multipli di 10 uguale a 80. Non è detto che le stelle disegnate siano sufficienti per esaurire tutti i casi possibili, oppure potrebbero essere sovrabbondanti…

In queste due ultime attività l'insegnante può cogliere l'occasione per stimolare un primo ragionamento di tipo combinatorio. Per raggiungere l'obiettivo occorre innanzi tutto non preparare il disegno completo (il numero di rettangoli o di stelle preparate dev'essere diverso da quello necessario e sufficiente), poi costringere l'allievo a far fronte all'obiezione «Ne manca almeno una!» anche e soprattutto nel caso che lo stesso le abbia trovate tutte: in questo modo lo si costringe a cercare un criterio sistematico di generazione delle somme in modo che risulti evidente la completezza del lavoro. Nasce anche il problema della commutatività: 50+30 lo consideriamo diverso o no da 30+50?

Ecco un esempio di lavoro nel quale un allievo ha trovato tutti i casi possibili.

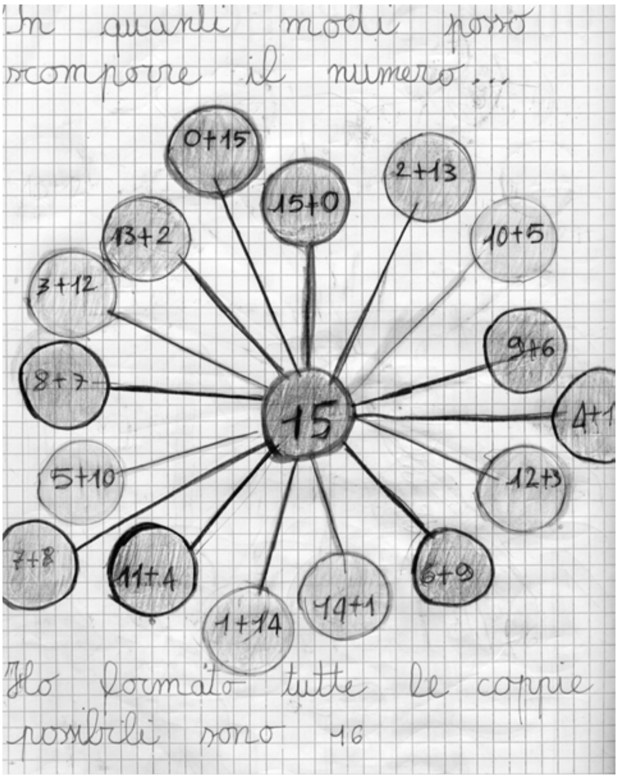

Figura 6 Fuochi d'artificio (Giulianova).

4.4. I percorsi frecciati

Sono utili anche per capire e rappresentare determinati algoritmi, per esempio quelli visti per la sottrazione e per la divisione. Conviene quindi introdurli subito, per esempio sotto forma di giochini, come mostrano le immagini che seguono. Le frecce rappresentano operatori, per esempio «+2» è un particolare operatore additivo che incrementa di 2 il numero iniziale.

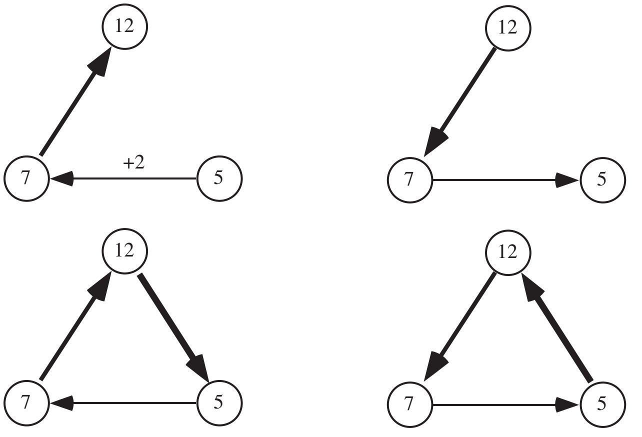

Figura 7 Cosa dicono le frecce? (Teramo).

Questa attività spinge l'allievo anche a considerare la relazione esistente tra due frecce parallele e di senso opposto. Nasce l'idea di operatore inverso: «+2» e «–2» sono operatori inversi. Che cosa si ottiene se a un numero dato si applicano successivamente due operatori inversi? In seconda non è necessario introdurre il termine «operatore»; gli allievi lo chiamano, per esempio, «macchina» o «maghetto» che cambia i numeri.

4.5. Scomposizioni a gogo

Ecco una situazione creata appositamente per stimolare gli allievi a cercare tutte le scomposizioni possibili.

A freccette (Giulianova e Teramo)

Pino e Lina giocano a freccette. Lina con un solo tiro ha fatto 50 punti. Pino vuole ottenere lo stesso punteggio, anche con più tiri.

In quali modi può totalizzare 50 punti?

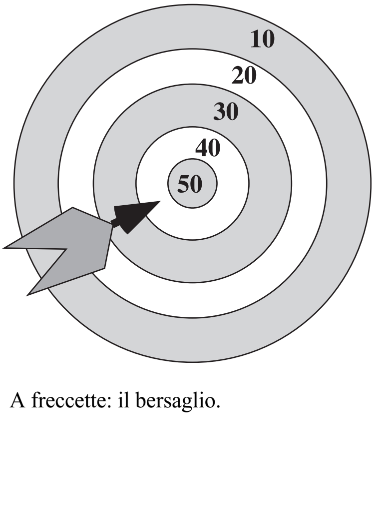

Figura 8 A freccette: il bersaglio.

50 = 50 + 0	50 = 10 + …. + ….. + …. + ….
50 = 20 + …..	50 = 10 + 20 + ….
50 = 10 + …..	50 = 20 + ….. + …. + ….
…..	….

4.6. Quando la mente batte la calcolatrice

Come già detto, uno degli aspetti stimolanti del calcolo mentale è quello di riuscire a battere in velocità un compagno che opera con la calcolatrice. Ecco un esempio significativo.

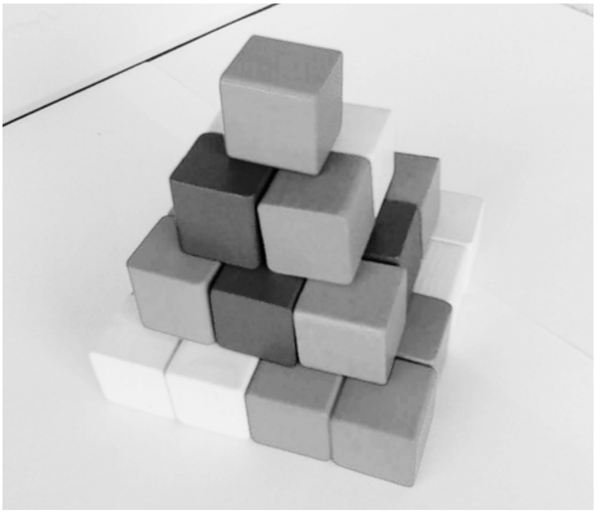

Figura 9 La piramide (Giulianova).

In ogni strato successivo, il centro della faccia inferiore dei cubetti coincide con il vertice che hanno in comune le facce superiori dei quattro cubetti sottostanti (vedere la figura 9).

Quanti cubetti sono stati usati per costruire la piramide?

$$16 + 9 + 4 + 1 = (16 + 9) + (4 + 1) = 25 + 5 = 30$$

Bello, facile, veloce.

Supponiamo ora di voler costruire una piramide alta il doppio. Quanti cubetti occorrerebbero?

$$1+4+9+16+25+36+49+64=(36+64)+(49+1)+(16+4)+(25+9)=$$
$$= 100 + 50 + 20 + 34 = 204$$

Difficilino, ma che bello poterci arrivare! D'altra parte, calcolare una somma di 8 addendi con la calcolatrice non è così facile come si potrebbe credere a prima vista: basta provare.

4.7. Tecnica di calcolo mentale e scrittura in riga

Quando si tratta di perfezionare la tecnica di calcolo mentale, è bene staccarsi dalle situazioni concrete. L'obiettivo è di acquisire una certa sicurezza e velocità. Non si deve nemmeno trascurare l'aspetto estetico: un calcolo fatto nel modo più semplice e sintetico è anche bello!

Ecco alcuni esempi tratti direttamente dai quaderni degli alunni.

«Ho fatto 150+236=386»

$(100 + 200) + (50 + 30) + (0 + 6)$

300 80 6

386

Si vede bene l'influsso della «macchina calcolatrice» e degli «orologi» (vedere le figure 1 e 2).

Sono bravo?

$14 + 23 = (10 + 20) + (4 + 3)= 30 + 7 = 37$

$91 – 16 = (91 – 10) – 6$

$56 – 23 = (50 – 20) + (6 – 3) = 33$

…

Notevole l'uso delle parentesi: contrariamente a quanto si pensava, gli allievi si abituano presto a usarle.

Ancora più bravi

$23 + 15 + 7 = (23 + 7) + 15 = 45$

$33 + 4 + 17 = (33 + 17) + 4 = 50 + 4 = 54$

$61 – 37 = (61 – 30) – 7 = (31 – 1) – 6 = 24$

…

Con la moltiplicazione entra in scena la proprietà distributiva.

$13 \times 6 = 10 \times 6 + 3 \times 6 = 60 + 18 = 78$

$24 \times 3 = 20 \times 3 + 4 \times 3 = 60 +12 = 72$

…

È interessante notare che il primo passaggio

$13 \times 6 = (10+3) \times 6$

non viene scritto. Sicurezza? Desiderio di semplificare la scrittura?

Bibliografia

Arrigo G. (2000). Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale. *Bollettino dei docenti di matematica*, 40, 57-68.
Arrigo G. (2001). Il calcolo a scuola (2): l'uso della calcolatrice. *Bollettino dei docenti di matematica*. 43, 57-64.
Arrigo G. (2004). Quale matematica per la scuola elementare? *Bollettino dei docenti di matematica*. 48, 9-28.
Arrigo G., Corrent G., Mainini G., Marchio A. (2006). *Atolli matematici*. Vol. 1. Lugano: Casagrande Fidia Sapiens, 10-34.
Arrigo G., Bollini V., Corrent G., Mainini G. (2007). *Atolli matematici*. Vol. 2. Lugano: Casagrande Fidia Sapiens, 52-59.
Brousseau G. (2007). *Français Calcul partie 2. Les divisions. Les méthodes, les dispositions, et les sens des divisions ...* Scaricabile dal sito http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie2.pdf
Bagni G.T. (1996). *Storia della Matematica*, volume I. Bologna: Pitagora, 160-161.
Jannamorelli B. (1995). *Strumenti di calcolo aritmetico ingenui… ma ingegnosi*. Torre dei Nolfi (AQ): Edizioni Qualevita.
Enzensberger H.M. (1997). *Il mago dei numeri*. Torino: Einaudi, 7-11.
Marazzani I. (2007). *I numeri grandi. Esperienze di ricerca e sperimentazione nella scuola dell'infanzia e primaria*. Trento: Erickson.
Wells D. (2002). *Personaggi e paradossi della matematica*. Milano: Oscar Saggi Mondadori, 83.